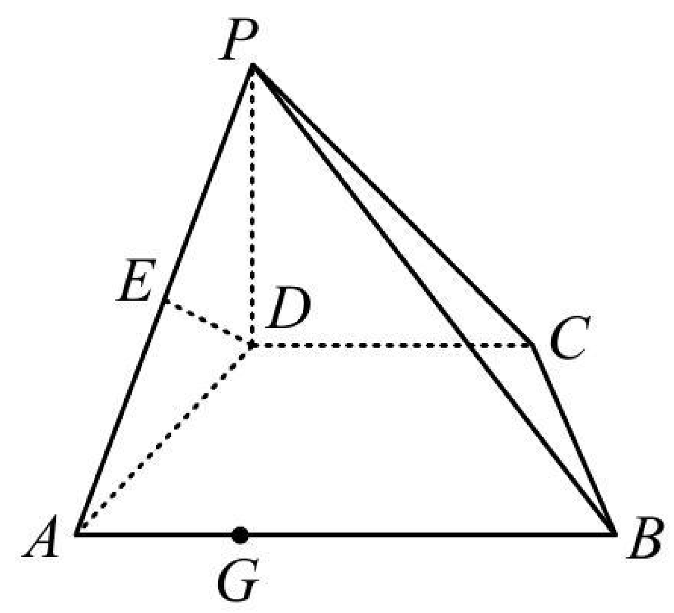
模块二 位置关系的判定

第 1 节 平行关系证明思路大全（★★）

强化训练

1．（2022・延边一模・★★）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\,/\!/\,CD$，$AB\perp AD$，$AB=2CD=2AD=2$，$\angle PAD=45^{\circ}$，E 是 PA 的中点，G 在线段 AB 上，且 $CG\perp BD$，证明：$DE\,/\!/$ 平面 PBC.



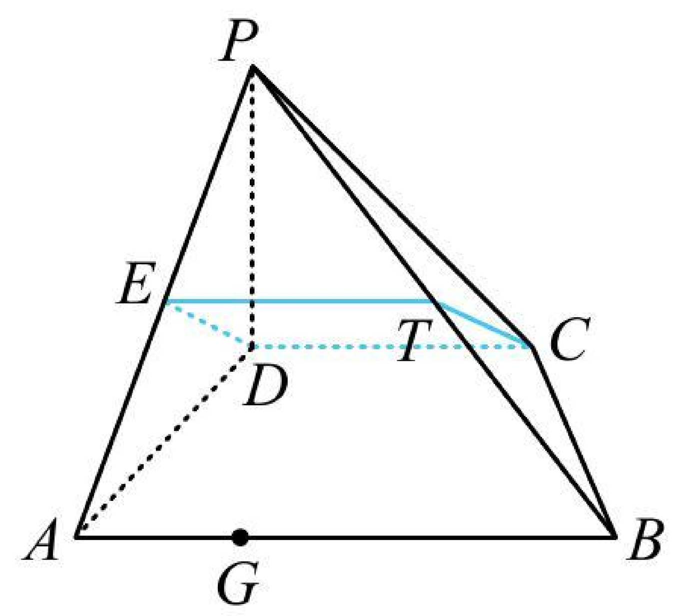
证明：（尝试过 C 作 DE 的平行线 CT，作出来就发现 $CDET$ 像平行四边形，且观察发现 T 应为中点）

如图，取 PB 中点 T，连接 CT，ET，因为 E 为 PA 中点，所以 $ET\,/\!/\,AB$ 且 $AB=2ET$，

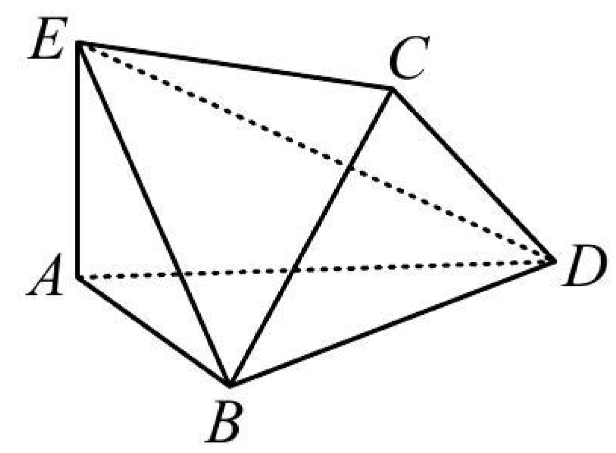
又 $AB\,/\!/\,CD$ 且 $AB=2CD$，所以 $ET\,/\!/\,CD$ 且 $ET=CD$，从而四边形 $CDET$ 为平行四边形，故 $DE\,/\!/\,CT$，

《一数•高考数学核心方法》

因为 $DE\not\subset$ 平面 PBC，$CT\subset$ 平面 PBC，所以 $DE\,/\!/$ 平面 PBC.



2．（2022・上海模拟・★★）如图，将边长为 2 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，使平面 $ABD\perp$ 平面 CBD，若 $AE\perp$ 平面 ABD，且 $AE=\sqrt{2}$，证明：$EC\,/\!/$ 平面 ABD.



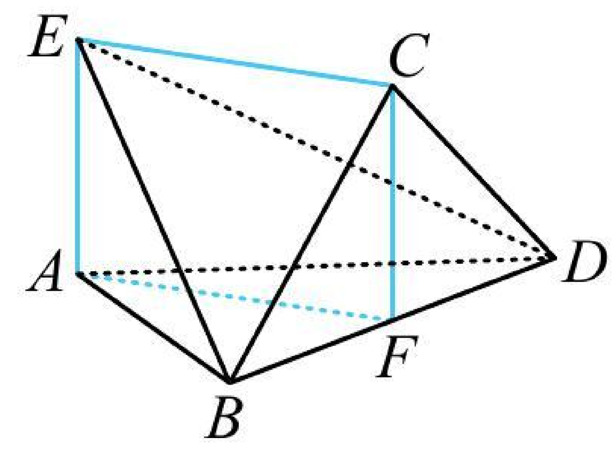
证明：（尝试过 A 作 EC 的平行线 AF，作出来就发现 $AFCE$ 像平行四边形，且观察发现 F 应为中点）

如图，取 BD 中点 F，连接 AF，CF，由题意，$\angle BCD=90^{\circ}$，$BC=CD=2$，所以 $CF=\sqrt{2}$，且 $CF\perp BD$，

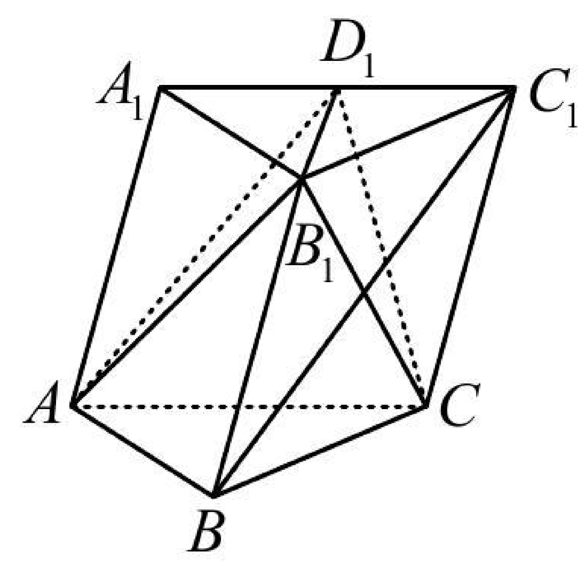
又平面 $ABD\perp$ 平面 CBD，平面 $CBD\cap$ 平面 $ABD=BD$，$CF\subset$ 平面 CBD，所以 $CF\perp$ 平面 ABD，

因为 $AE\perp$ 平面 ABD，且 $AE=\sqrt{2}$，所以 $AE\,/\!/\,CF$ 且 $AE=CF$，故四边形 $AECF$ 为平行四边形，

所以 $EC\,/\!/\,AF$，因为 $EC\not\subset$ 平面 ABD，$AF\subset$ 平面 ABD，所以 $EC\,/\!/$ 平面 ABD.



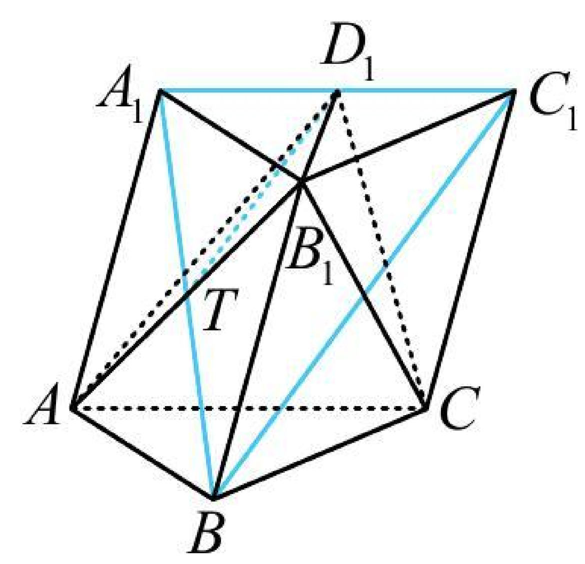
3．（2022 • 河池模拟 • ★★）如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 D_1 为 A_1C_1 的中点，证明：BC_1 // 平面 AB_1D_1.



证明：（观察发现 BC_1 和 A_1 位于面 AB_1D_1 两侧，由内容提要 2 的①可知只需连接 A_1B，证明 BC_1 // D_1T 即可）

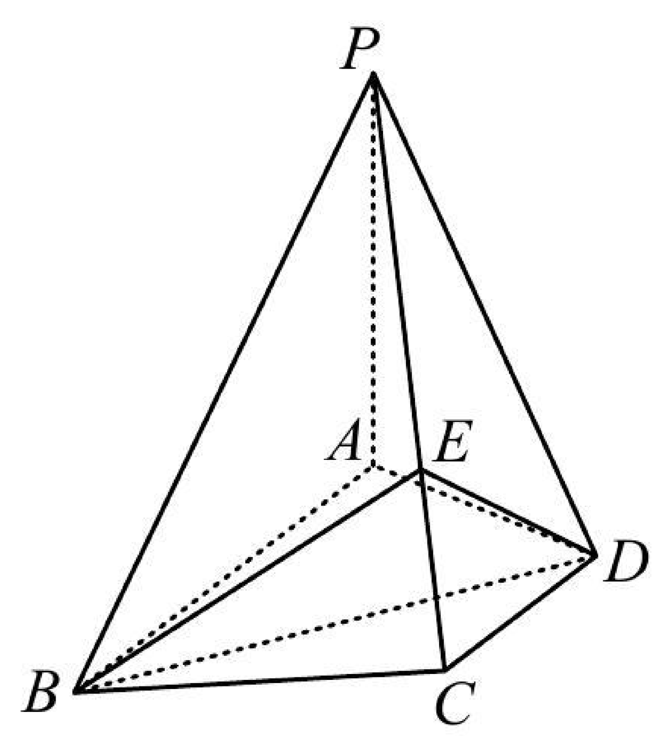
如图，连接 A_1B 交 AB_1 于点 T，因为 ABB_1A_1 是平行四边形，所以 T 为 A_1B 的中点，

又 D_1 为 A_1C_1 的中点，所以 D_1T // BC_1，因为 $BC_1 \not\subset$ 平面 AB_1D_1，$D_1T \subset$ 平面 AB_1D_1，所以 BC_1 // 平面 AB_1D_1.



《一数•高考数学核心方法》

4．（2022 • 哈尔滨模拟 • ★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA \perp$ 底面 $ABCD$，AB // DC，$AD \perp AB$，$AB=AP=2$，$DA=DC=1$，E 为 PC 上一点，$PE=\dfrac{2}{3}PC$，证明：PA // 平面 BDE.

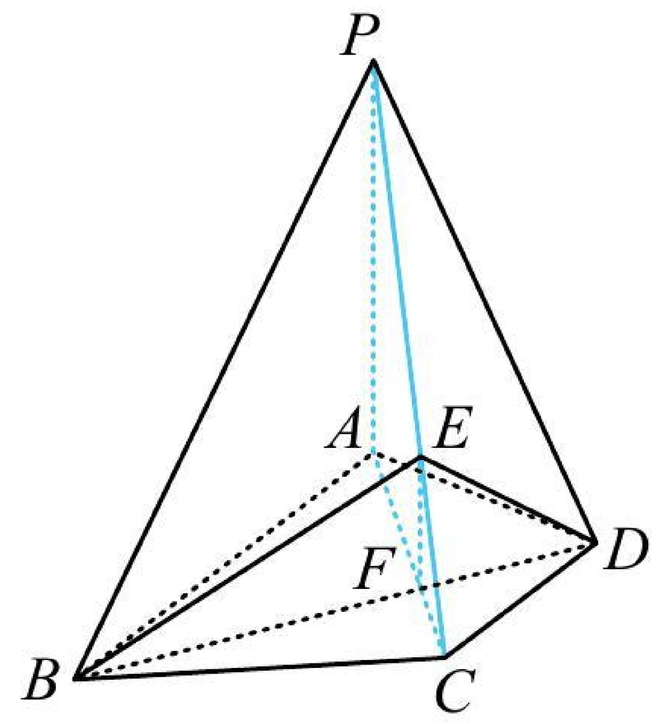


证明：（观察发现 PA 和 C 位于面 BDE 两侧，由内容提要 2 的①可知只需连接 AC，证明 PA 平行于交线 EF 即可，但观察发现 F 不是中点，故考虑通过证线段成比例来证平行）

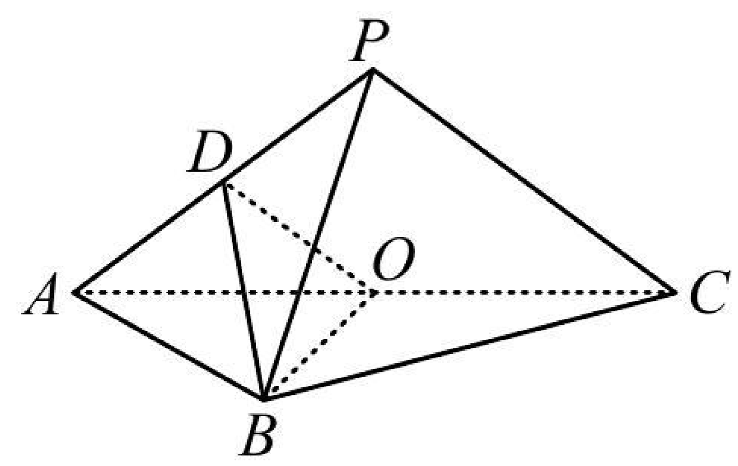
如图，连接 AC 交 BD 于点 F，连接 EF，因为 AB // DC，所以 $\Delta CFD \backsim \Delta AFB$，故 $\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

又 $PE=\dfrac{2}{3}PC$，所以 $\dfrac{CE}{PE}=\dfrac{1}{2}$，从而 $\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{CE}{PE}$，故 EF // PA，

因为 $PA \not\subset$ 平面 BDE，$EF \subset$ 平面 BDE，所以 PA // 平面 BDE.



5.（2023 • 陕西模拟 • ★★）如图，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC， $AB\perp BC$ ， $AB=BC$，D 为 PA 的中点，点 O 在 AC 上，且 OD // 平面 PBC，证明：O 为 AC 中点.



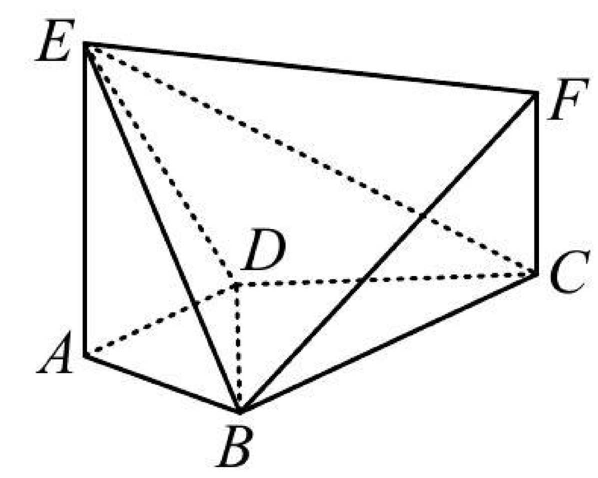
证明：（给了线面平行，故考虑线面平行的性质定理）

因为 OD // 平面 PBC， $OD\subset$ 平面 PAC，平面 $PAC\cap$ 平面 $PBC=PC$，所以 OD // PC，

又由题意，D 为 PA 的中点，所以 O 为 AC 的中点.

6.（2023 •湖北模拟 •★★）如图，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，BF // 平面 ADE，CF // AE，$AD\perp AB$ ，$AB=AD=2$，$AE=BC=4$，证明：AD // BC.

《一数•高考数学核心方法》



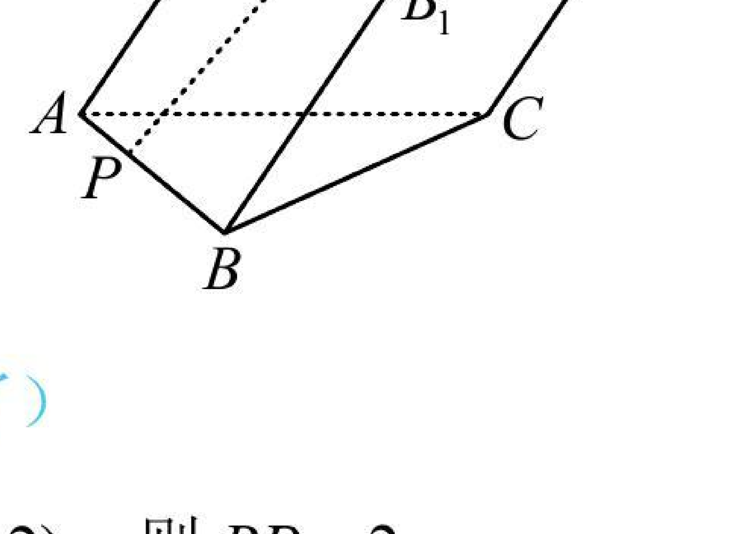
证明：（条件中有线面平行，要证的是线线平行，这些都提示了我们该考虑性质定理，结合图形知可先证面 BCF // 面 ADE，再用面面平行的性质定理证结论）

因为 CF // AE， $CF\not\subset$ 平面 ADE， $AE\subset$ 平面 ADE，所以 CF // 平面 ADE，

又由题意，BF // 平面 ADE，且 CF， $BF\subset$ 平面 BCF， $CF\cap BF=F$ ，所以平面 BCF // 平面 ADE，

因为平面 $ABCD\cap$ 平面 $BCF=BC$ ，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ADE=AD$，所以 AD // BC.

7.（★★）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2， $\angle BAC=\angle BAA_1=\angle CAA_1=60^\circ$，$P$，$Q$ 分别在 AB， A_1C_1 上（不包括端点）， $AP=A_1Q$，证明：PQ // 平面 BCC_1B_1.



证法 1：（先过 C_1 作 PQ 的平行线，观察发现 PQC_1D 像平行四边形，思路就有了）

如图 1，作 PD // AC 交 BC 于 D，则 ΔBPD 是正三角形，设 $AP=A_1Q=x(0<x<2)$，则 $BP=2-x$，

所以 $PD=2-x$，又 $C_1Q=A_1C_1-A_1Q=2-x$，所以 $PD=C_1Q$，

因为 $C_1Q\,/\!/\,AC$，$PD\,/\!/\,AC$，所以 $C_1Q\,/\!/\,PD$，从而四边形 PQC_1D 是平行四边形，故 $PQ\,/\!/\,C_1D$，

因为 $PQ\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$C_1D\subset BCC_1B_1$，所以 $PQ\,/\!/$ 平面 BCC_1B_1.

证法 2：（若没想到构造平行四边形，也可尝试造面，不妨先过 P 作面 BCC_1B_1 的平行线）

如图 2，作 $PE\,/\!/\,BC$ 交 AC 于 E，连接 QE，因为 $PE\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $PE\,/\!/$ 平面 BCC_1B_1 ①，

由题意，ΔABC 是正三角形，所以 ΔAPE 也是正三角形，故 $AE=AP$，又 $AP=A_1Q$，所以 $AE=A_1Q$，

结合 $AE\,/\!/\,A_1Q$ 可得四边形 AA_1QE 是平行四边形，所以 $QE\,/\!/\,AA_1$，又 $AA_1\,/\!/\,CC_1$，所以 $QE\,/\!/\,CC_1$，

因为 $QE\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，$CC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $QE\,/\!/$ 平面 BCC_1B_1 ②，

因为 QE，$PE\subset$ 平面 PQE，$QE\cap PE=E$，结合①②可得平面 $PQE\,/\!/$ 平面 BCC_1B_1，

因为 $PQ\subset$ 平面 PQE，所以 $PQ\,/\!/$ 平面 BCC_1B_1.

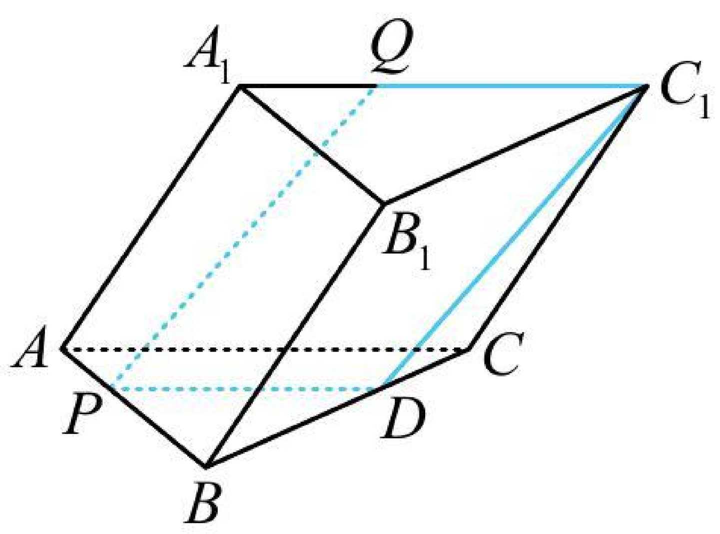


图1

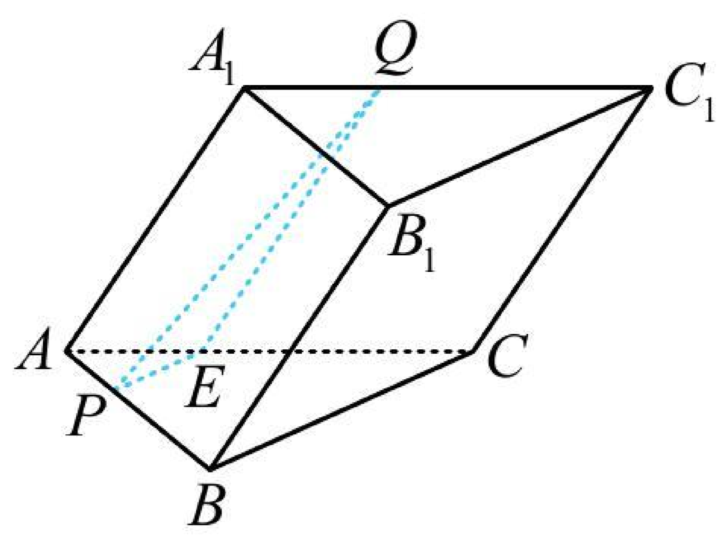
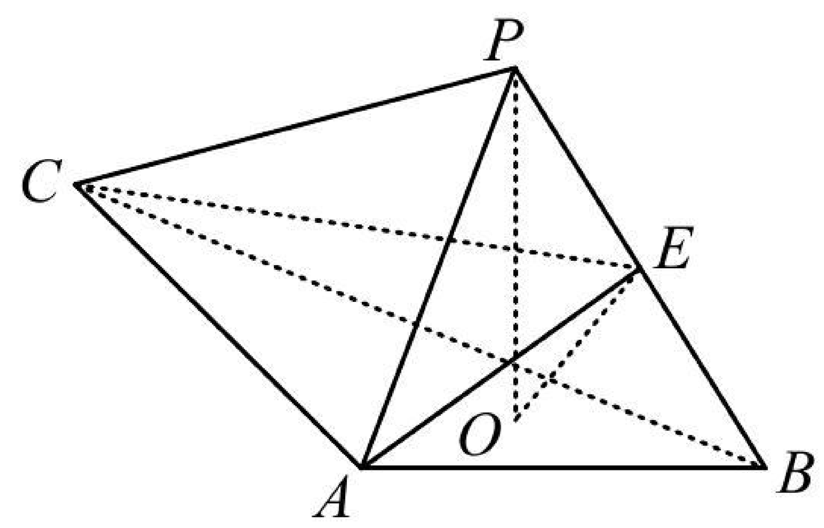


图2

《一数•高考数学核心方法》

8．（2022・新高考Ⅱ卷节选・★★★）如图，PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E 为 PB 的中点，证明：$OE\,/\!/$ 平面 PAC.



证法 1：（观察发现 OE 和 B 在面 PAC 的同侧，符合内容提要 2 中②的情况，故可通过延长 BO 找平行线）

连接 OA，延长 BO 交 AC 于点 G，连接 PG，如图 1，

（要证 $OE\,/\!/\,PG$，结合 E 为 PB 中点知只需证 O 为 BG 中点，注意到 $\angle BAG=90^\circ$，故又只需证 $AO=OB$）

因为 PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，所以 $PO\perp$ 平面 ABC，又 OA，$OB\subset$ 平面 ABC，故 $PO\perp OA$，$PO\perp OB$，

结合 $PA=PB$，$PO=PO$ 可得 $\Delta POA\cong\Delta POB$，所以 $OA=OB$，又 $AB\perp AC$，所以 O 为 BG 中点，

因为 E 为 PB 中点，所以 $OE\,/\!/\,PG$，因为 $OE\not\subset$ 平面 PAC，$PG\subset$ 平面 PAC，所以 $OE\,/\!/$ 平面 PAC.

证法 2：（若没想到证法 1 的方法，也可通过造面来证结论，不妨先过点 E 作 PA 的平行线交 AB 于 F，F 应为 AB 的中点，观察发现构造的面即为 EOF，思路就有了）

取 AB 中点 F，连接 EF，OF，PF，如图 2，因为 E 是 PB 中点，所以 $EF\,/\!/\,PA$，

又 $EF\not\subset$ 平面 PAC，$PA\subset$ 平面 PAC，所以 $EF\,/\!/$ 平面 PAC ①；

（再证 $OF\,/\!/$ 平面 PAC，只需证 $OF\,/\!/\,AC$，结合 $AC\perp AB$ 知又只需证 $OF\perp AB$）

因为 PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，所以 $PO\perp$ 平面 ABC，又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $AB\perp PO$，

因为 $PA=PB$，所以 $AB\perp PF$，而 PO，$PF\subset$ 平面 POF，$PO\cap PF=P$，所以 $AB\perp$ 平面 POF，

因为 $OF\subset$ 平面 POF，所以 $OF\perp AB$，又 $AC\perp AB$，且 AC，OF，AB 都在平面 ABC 内，所以 $OF/\!/AC$，

因为 $OF\not\subset$ 平面 PAC，$AC\subset$ 平面 PAC，所以 $OF/\!/$ 平面 PAC ②；

因为 OF，$EF\subset$ 平面 OEF，$OF\cap EF=F$，结合①②可得平面 $OEF/\!/$ 平面 PAC，

又 $OE\subset$ 平面 OEF，所以 $OE/\!/$ 平面 PAC.

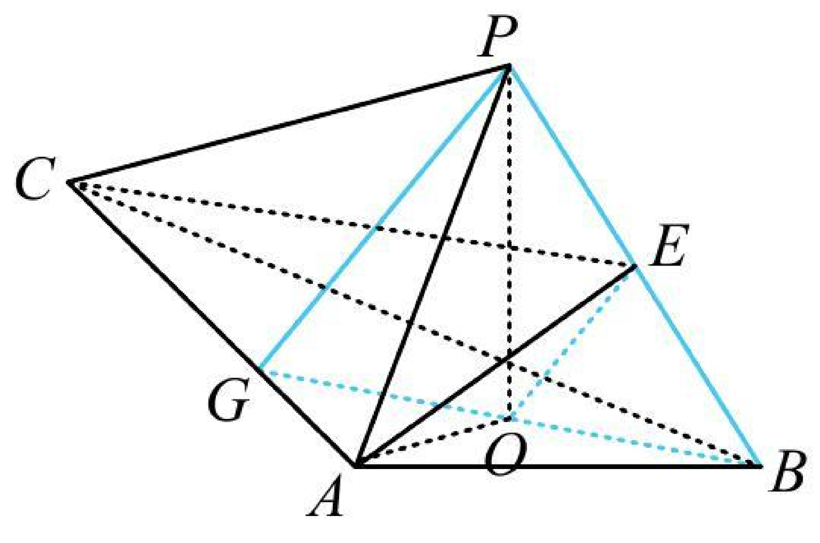


图1

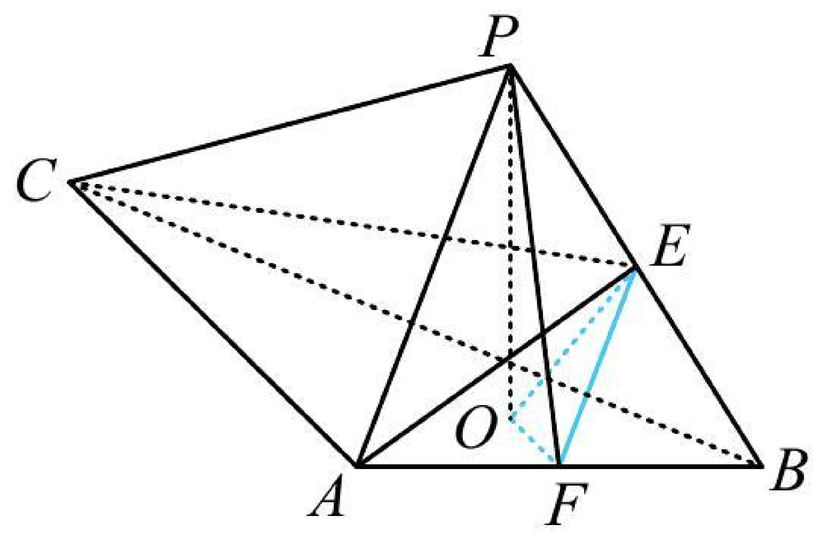


图2

【反思】证线面平行时，很多题目内容提要里涉及的三种思路常常都可以做，但复杂度可能有差异.

《一数•高考数学核心方法》